$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

# ΛΥΣΗ

$$\text{Εστω } X = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 1}}}}$$

$$\text{Άρα : } X^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 1}}}} \text{ , έτσι } X^2 = X+1.$$

$$\text{Άρα } X^2 - X - 1 = 0$$

$$X = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) \text{ η αρνητική ρίζα απορίπτεται άρα, } X = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

έτσι πάει αλλά πρέπει κάποιος να δείξει ότι αυτό το "απειρό - άθροισμα" υπάρχει.... δηλ. συγκλίνει.. και ότι δεν απειρίζεται... Για το λόγο αυτό θεώρουμε την ακολουθία

$$x_\nu \,\middle|\, x_{\nu+1} = \sqrt{1+x_\nu},\ \ x_1 = 1$$

η οποία είναι αύξουσα και φραγμένη... (απλό)/.... και συνεχίζουμε όπως συνέχισες... Μ